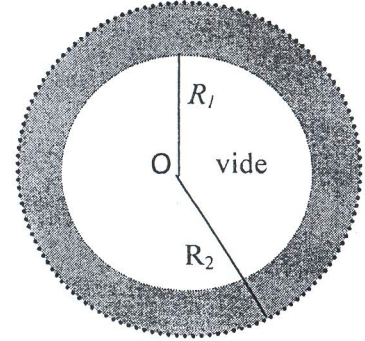


**Contrôle de rattrapage d'Electrostatique et Electrocinétique
(SMPC2). Durée : 1h30'**

Exercice 1 (11 points)

Considérons une sphère creuse de centre O , de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 (voir figure), **uniformément** chargée en volume avec une densité ρ (pour la partie grise). Plaçons nous dans un repère de coordonnées sphériques muni de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. On travaille dans le vide de permittivité ϵ_0 .



2	1- Déterminer la charge totale Q , de la sphère creuse en fonction de ρ , R_1 et R_2 . $Q = \iiint \rho \, d\tau, \text{ or } \rho = \text{cte} \text{ alors } Q = \rho \tau$ $\tau = \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3) \text{ d'où } Q = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3)$
1	2- Par des considérations de symétrie des charges, déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(O)$ au centre O de la sphère. θ est un centre de symétrie pour la distribution de charges, d'où $\vec{E}(\theta) = \vec{0}$
1	3 - Trouver la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace (OM) est un axe de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ est porté par cet axe, d'où $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$
1	4 - Etudier l'invariance de la distribution de charge. On posera : $r = OM$. La distribution de charge est invariante par rotation selon θ et φ , donc $\vec{E}(M)$ ne dépend ni de θ ni de φ , il ne dépend que de r . Ainsi : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$
0.5	5 - En déduire la surface de Gauss convenable pour calculer $\vec{E}(M)$. La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon $r = OM$.

6 - Exprimer $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace en fonction de ρ, ϵ_0, r, R_1 et R_2 .

Th. de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

① $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E(r) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = E \cdot 4\pi r^2$

donc $E(M) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

① \rightarrow 1^{er} cas : $r < R_1$ $Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$

② \rightarrow 2^{ème} cas : $R_1 < r < R_2$ $Q_{int} = \rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3)$

donc $\vec{E}(M) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{e}_r$

③ \rightarrow 3^{ème} cas : $r > R_2$ $Q_{int} = Q = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3)$

$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \vec{e}_r$
(ou)

4

7- Exprimer le potentiel électrique $V(M)$ créé par la sphère chargée pour le cas : $r > R_2$.
Noter que $V = 0$ pour $r \rightarrow \infty$ et qu'en coordonnées sphériques le gradient d'une fonction scalaire est :

1.5

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = -g \overrightarrow{\text{grad}} V = - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right]$$

\vec{E} est selon \vec{e}_r donc $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow V$ ne dépend que de r ; d'où $E = - \frac{dV}{dr} \Rightarrow V = \int -E dr$

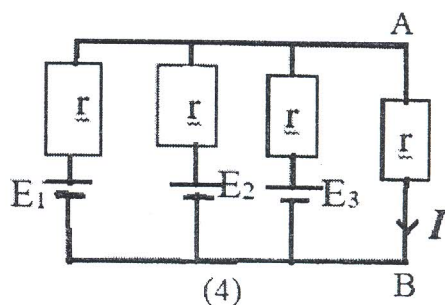
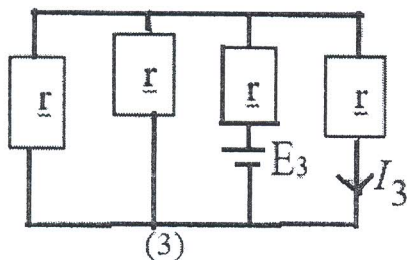
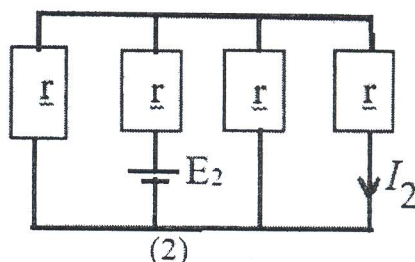
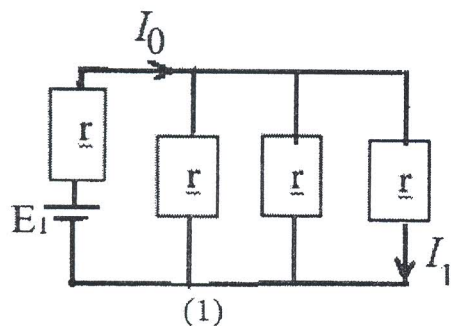
Dans le cas $r > R_2$:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int - \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}$$

or $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$ alors $\text{cte} = 0$, ainsi $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{r}$

Exercice 2 (9 points)

On considère les quatre circuits électriques suivants :



1

1) Montrer que $I_1 = \frac{I_0}{3}$. Les trois résistances sont en // et sont identiques, donc elles sont parcourues par le même courant I_1 . Loi des nœuds $\Rightarrow I_0 = I_1 + I_2 + I_1 = 3 I_1$
d'où $I_1 = \frac{I_0}{3}$

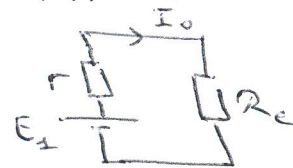
1

2) Trouver l'expression de I_0 dans le circuit (1).

La résistance équivalente des 3 résistances r en // est telle que

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \Rightarrow R_e = \frac{r}{3}$$

Pouillet : $I_0 = \frac{E_1}{r + R_e} = \frac{E_1}{r + \frac{r}{3}} = \frac{3E_1}{4r}$



0.5

3) En déduire l'expression de I_1 dans le circuit (1).

$$I_1 = \frac{I_0}{3} = \frac{E_1}{4r}$$

1

4) En déduire (sans refaire les calculs) les expressions de I_2 (dans le circuit (2)) et I_3 (dans le circuit (3)). Les circuits (2) et (3) sont équivalents au circuit (1) en remplaçant E_1 par E_2 ou par E_3 .

$$I_2 = \frac{E_2}{4r}$$

$$I_3 = \frac{E_3}{4r}$$

5) En déduire l'expression de I dans le circuit (4).

1.5

D'après le théorème de superposition : $I = I_1 + I_2 + I_3$

$$\text{donc } I = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{4r}$$

6) On branche entre A et B (circuit 4) une résistance R . En appliquant le théorème de Thevenin, trouver l'expression du courant I' qui traverse cette résistance.

Si on enlève R , le circuit (1) devient équivalent au circuit (4).

$$\text{donc } E_{Th} = (V_A - V_B)_{\text{à vide}} = rI = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{4}$$

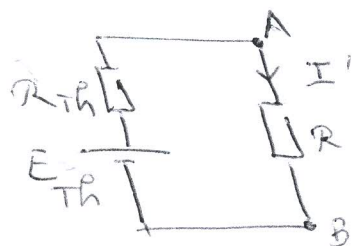
* On court-circuite les f.e.m.

E_1, E_2 et E_3 .

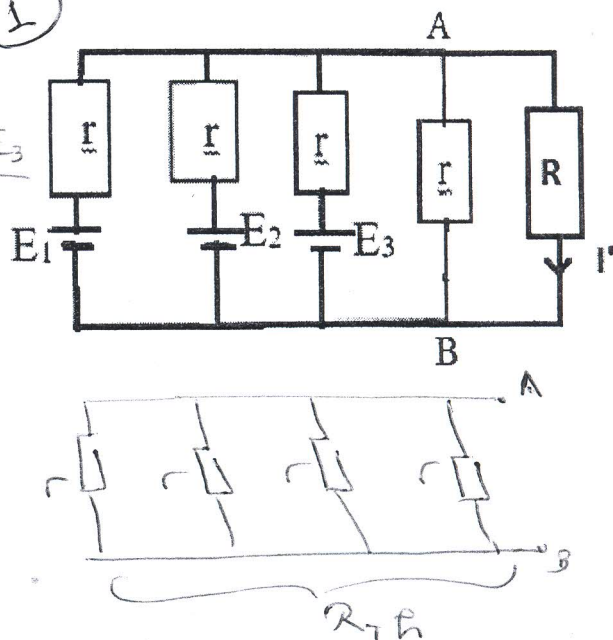
$$R_{Th} = R_{AB} = r // r // r // r$$

$$R_{Th} = \frac{r}{4}$$

* On obtient le circuit :



$$I' = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} = \frac{\frac{E_1 + E_2 + E_3}{4}}{\frac{r}{4} + R} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{r + 4R}$$



7) Calculer la puissance électrique perdue par effet Joule dans la résistance R .

1

On donne : $E_1 = E_2 = E_3 = 10 \text{ V}$, $r = 10 \Omega$ et $R = 100 \Omega$.

$$P = R I'^2, \quad I' = \frac{30}{410} = 0,073 \text{ A}$$

$$P = 0,535 \text{ W}$$